4.4.25 Grafické řešení slovních úloh

Předpoklady: 040424

Pedagogická poznámka: Než se žáci v příkladu 1 vrhnou do kreslení grafu, je třeba je zastavit, aby si rozmysleli měřítka a os a orientaci grafu.

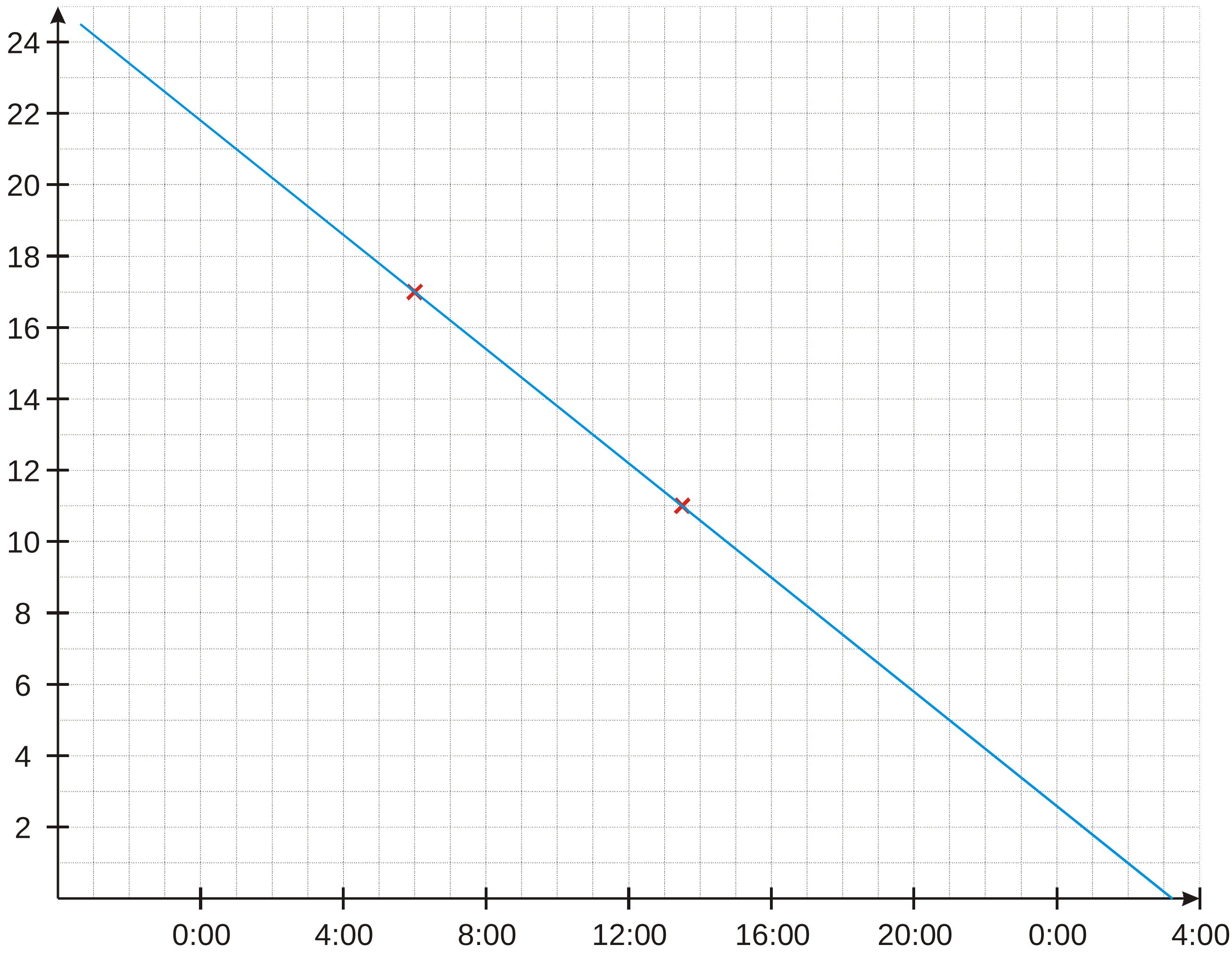
Př. 1: Jaké záložní zdroj elektrické energie nutné k chlazení mrazáků je ve vědeckém ústavu použita elektrocentrála s benzínovým motorem a s nádrží o objemu 24 l. Při kontrole po nástupu do služby v 6:00 zjistil technik, že centrála běží a v nádrži (která je standardně zcela plná) zbývá ještě 17 litrů benzínu, při další kontrole v 13:30 bylo v nádrži ještě 11 litrů benzínu. V kolik hodin došlo k výpadku elektrického proudu? Do kolika hodin při zachování spotřeby vystačí benzín v nádrži? Příklad řeš nejdříve graficky, poté najdi předpis funkce (přesný tvar s konstantami ve tvaru zlomku), která udává množství benzínu v nádrži a výsledky překontroluj početně.

Nejdříve musíme odhadnout měřítka os a orientaci grafu.
Papír k dispozici: A5 přibližně 40 x 29 čtverečků $\Rightarrow$

- kratší strana papíru: objem benzínu, 1 čtvereček odpovídá 1 l (osu budeme popisovat po dvou čtverečcích),
- delší strana papíru: odhad doby děje: mezi měřeními uběhlo 7,5 h, za tu dobu ubylo 6 litrů benzínu $\Rightarrow$ celý děj bude trvat přibližně čtyřikrát déle tedy 32 hodin, a začne už předchozí den $\Rightarrow$ 1 čtvereček odpovídá 1 h, osa musí začínat ve 20:00 předchozího dne.

Z grafu můžeme odečíst:

- výpadek proudu nastal přibližně v 21:20 předchozího dne (bod grafu s *y*-ovou hodnotou 24)
- při zachování spotřeby bude nádrž prázdná přibližně v 3:15 následujícího dne (průsečík s osou *x*, *y*-ová hodnota 0),



Graf funkce prochází dvěma body:

- $[6; 17]$ - v 6 hodin bylo v nádrži 17 litrů
- $[13,5; 11]$ - v 13:30 bylo v nádrži 11 litrů

Dosadíme do předpisu lineární funkce $y = ax + b$:

$[6;17]$: $17 = a \cdot 6 + b$

$[13,5;11]$: $11 = 13,5\, a + b$

Rovnice odečteme: $-6 = 7,5a \quad / : 7,5$

$$a = -\frac{6}{7,5} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

Dosadíme a do první rovnice $17 = a \cdot 6 + b$ a vypočteme b:

$$17 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot 6 + b = -\frac{24}{5} + b \quad / + \frac{24}{5}$$

$$b = 17 + \frac{24}{5} = \frac{89 + 24}{5} = \frac{109}{5}$$

Množství benzínu v nádrži je popsáno funkcí: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{109}{5}$.

Výpadek proudu nastal, když v nádrži bylo 24 litrů benzínu ($y = 24$).

$$24=-\frac{4}{5}x+\frac{109}{5} \quad /\cdot 5$$
$$120=-4x+109 \quad /-120+4x$$
$$4x=-11 \quad /:4$$
$$x=-\frac{11}{4}=-2\frac{3}{4}$$
Výpadek proudu nastal dvě a tři čtvrtě hodiny před půlnocí, tedy ve 21:15 předchozího dne.

Benzín v nádrži dojde v okamžiku, kdy bude platit $y=0$.
$$0=-\frac{4}{5}x+\frac{109}{5} \quad /\cdot 5$$
$$0=-4x+109 \quad /+4x$$
$$4x=109 \quad /:4$$
$$x=\frac{109}{4}=27\frac{1}{4}$$
Benzín v nádrži dojde ve 3: 15 následujícího dne ráno.

Př. 2: Z grafu sestrojeného v předchozím příkladu zjisti:
a) Kolik benzínu bylo v nádrži v 19:00?
b) V kolik hodin bylo v nádrži 10 litrů benzínu?
c) Pokud klesne množství benzínu v nádrži pod 3 litry, je povinností obsluhy ihned doplnit nádrž. V kolik hodin k tomu dojde?

a) Kolik benzínu bylo v nádrži v 19:00?
Odečtení z grafu: přibližně 6,7 litru.
Výpočet: Dosazujeme $x=19$.
$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{109}{5}=-\frac{4}{5}\cdot 19+\frac{109}{5}=\frac{-76+109}{5}=\frac{33}{5}=6,6 \text{ litru}$$

b) V kolik hodin bylo v nádrži 10 litrů benzínu?
Odečtení z grafu: přibližně 14:40.
Výpočet: Dosazujeme $y=10$.
$$10=-\frac{4}{5}x+\frac{109}{5} \quad /\cdot 5$$
$$50=-4x+109 \quad /+4x-50$$
$$4x=59 \quad /:4$$
$x=14,75 \Rightarrow$ 10 litrů benzínu bylo v nádrži ve 14:45.

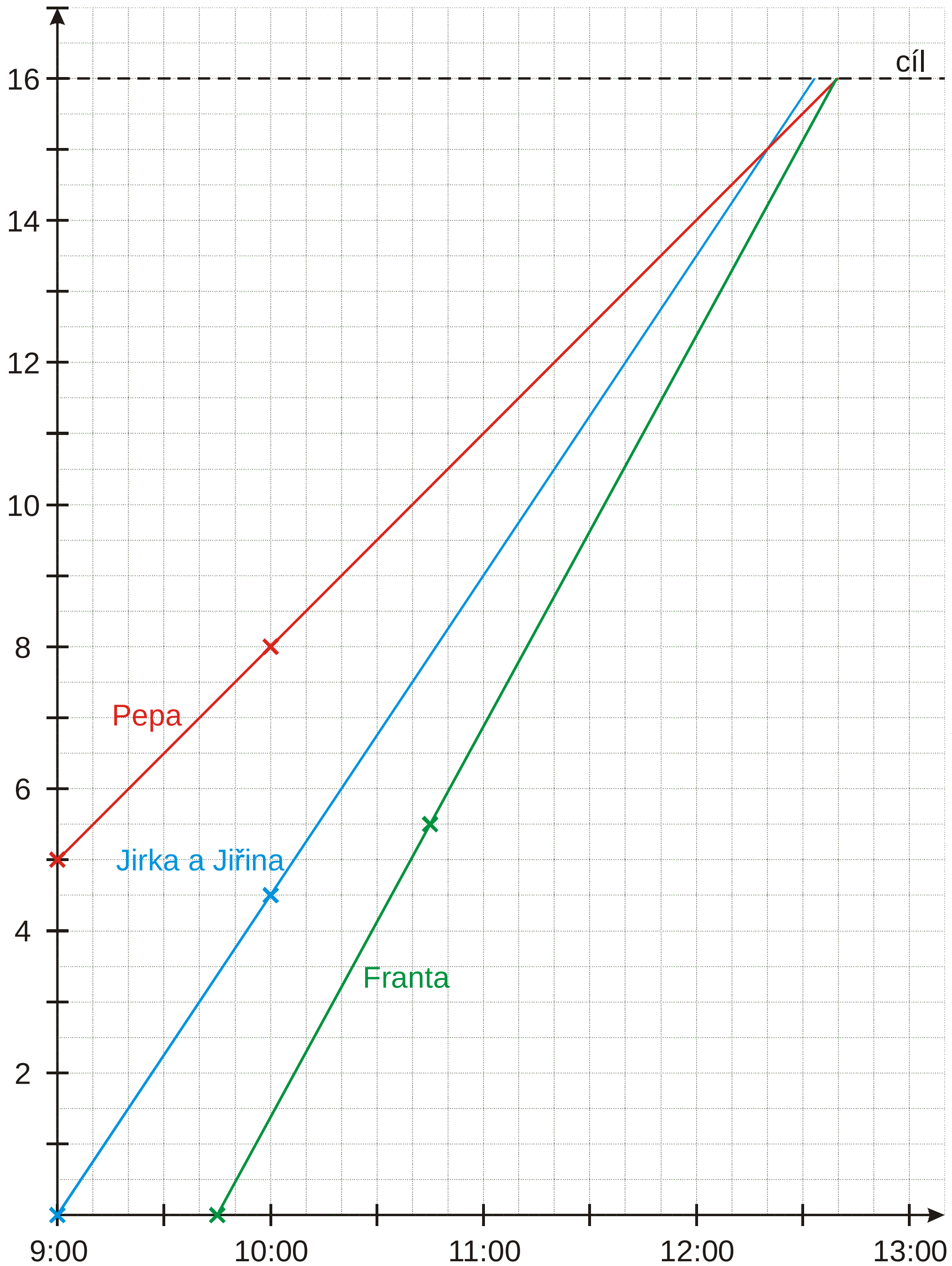
c) Pokud klesne množství benzínu v nádrži pod 3 litry, je povinností obsluhy ihned doplnit nádrž. V kolik hodin k tomu dojde?
Odečtení z grafu: přibližně 23:30.
Výpočet: Dosazujeme $y=3$.
$$3=-\frac{4}{5}x+\frac{109}{5} \quad /\cdot 5$$
$$15=-4x+109 \quad /+4x-15$$
$$4x=94 \quad /:4$$

$x = 23,5 \Rightarrow$ 3 litry benzínu budou v nádrži ve 23:30.

Př. 3: Tři spolužáci se zúčastnili výročního pochodu na 16 km Jarní šlápota. Pepa dělal doprovod mladší sestřičce a tak vyrazili v 9:00 na zkrácenou trasu, která začínala na 5 km pochodu a šli pomalu rychlostí 3 km/h. Jirka s Jiřinou vyrazili také v 9:00 z oficiálního startu a do cíle se blížili rychlostí 4,5 km/h. Franta jako obvykle zaspal, takže se na start dostal až v 9:45 a aby nebyl v cíli poslední pospíchal rychlostí 5,5 km/h. Potkali se někteří dva na trase? Pokud ano, kdy a kde? V jakém pořadí dorazili do cíle? V kolik hodin?

Nejdříve musíme odhadnout měřítka os a orientaci grafu.
Papír k dispozici: A5 přibližně 40 x 29 čtverečků $\Rightarrow$

- delší strana papíru: ušlé km (osa y), 1 čtvereček odpovídá 0,5 km (využijeme 32 čtverečků),
- kratší strana papíru: odhad doby děje: mají ujít 16 km rychlostí 5 km $\Rightarrow$ celý děj bude trvat přibližně čtyři hodiny $\Rightarrow$ 1 hodina odpovídá 6 čtverečků (1 čtvereček představuje 10 minut).



Z grafu můžeme odečíst:

- na trase se potkali:
  - Jirka s Jiřinou a Pepa se sestřičkou, přibližně na 15 km od startu v 12:20,
  - Franta s Pepou přibližně v cíli v 12:40.
- nejdříve do cíle dorazil Jirka s Jiřinou v 12:35, Franta s Pepou přišli přibližně nastejno ve 12:40.

Pedagogická poznámka: Pokud žáci tvoří grafy v Geogebře, je třeba dát pozor na zadávání časů u Franty. Místo správných 9.75 se často objevuje 9.45.

Př. 4: Najdi v grafu předchozího příkladu.
a) Kde byl každý z účastníků pochodu v 11:00?
b) V kolik hodin se jednotliví účastníci dostali na 10 km pochodu?

a) Kde byl každý z účastníků pochodu v 11:00?
- Pepa 11 km od startu,
- Jirka s Jiřinou 9 km od startu,
- Franta přibližně 6,8 km od startu.

b) V kolik hodin se jednotliví účastníci dostali na 10 km pochodu?
- Pepa v 10:42,
- Jirka s Jiřinou v 11:15,
- Franta v 11:35.

Př. 5: Ověř výsledky dvou předchozích příkladů výpočty s přesností na desítky metrů a minuty.

Setkání na trase:
Jirka s Jiřinou se potkají s Pepou: $s_P = s_J - 5$ (Pepa nevyrážel ze startu, ale z 5 km)
Dráha Jirky a Jiřiny: $v_J t_J$, dráha Pepy: $v_P t_P$.
Dosadíme: $v_J t_J - 5 = v_P t_P$.
Platí $t_P = t_J = t$ (všichni vyrazili ve stejný okamžik), dosadíme rychlosti:
$4,5t - 5 = 3t \quad / + 5 - 3t$
$1,5t = 5 \quad / : 1,5$
$$t = \frac{5}{1,5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$
$$s_J = v_J t_J = 4,5 \cdot \frac{10}{3} = \frac{45}{3} = 15$$
Jirka s Jiřinou potkají Pepu za 3hodiny 20 minut, tedy ve 12:20 na 15 km pochodu.

Franta se potká s Pepou: $s_P = s_F - 5$ (Pepa nevyrážel ze startu, ale z 5 km)
Dráha Franty: $v_F t_F$, dráha Pepy: $v_P t_P$.
Dosadíme: $v_F t_F - 5 = v_P t_P$.
Platí $t_F = t_P - \frac{45}{60} = t_P - \frac{3}{4}$ (Franta vyrazil až v 9:45), dosadíme rychlosti:
$$5,5\left(t - \frac{3}{4}\right) - 5 = 3t$$
$$5,5t - \frac{16,5}{4} - 5 = 3t \quad / -3t + 5 + \frac{16,5}{4}$$
$$2,5t = 5 + \frac{16,5}{4} \quad / \cdot 4$$
$10t = 20 + 16,5$
$10t = 36,5$
$t = 3,65 = 3 \text{ h } 39 \text{ min}$
$s_F = v_F t_F = 3 \cdot 3,65 = 10,95$

Franta dohoní Pepu za 3hodiny 39 minut, tedy ve 12:39 na 15,95 km pochodu (tedy 50 před cílem).

Vzdálenost od startu v 11:00:

- Pepa: $s = 5 + 3 \cdot 2 = 11\,\mathrm{km}$
- Jirka s Jiřinou: $s = 4,5 \cdot 2 = 9\ \mathrm{km}$
- Franta: $s = 5,5 \cdot 1,25 \doteq 6,9\,\mathrm{km}$

Kdy se dostali na 10 km pochodu?

- Pepa (musí ujít jen 5 km): $t = \frac{5}{3}h = 1\,\mathrm{h}\ 40\ \mathrm{min} \ \Rightarrow$ v 10:40 hod.
- Jirka s Jiřinou: $t = \frac{10}{4,5}h = 2\,\mathrm{h}\,13\,\mathrm{min} \ \Rightarrow$ v 11:13 hod.
- Pepa: $t = \frac{10}{5,5}h = 1\,\mathrm{h}\ 49\ \mathrm{min} \ \Rightarrow$ v 11:34 hod.

Shrnutí: